ცალკე ამონაბეჭდი
Отдельный оттиск

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე

СООБЩЕНИЯ
АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

BULLETIN
OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE GEORGIAN SSR

135, № 2, აგვისტო, 1989

ნაწილი II

ᲡᲐᲥᲐᲠᲗᲕᲔᲚᲝᲡ ᲡᲡᲠ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ ᲐᲙᲐᲓᲔᲛᲘᲘᲡ ᲛᲝᲐᲛᲑᲔ, 135, № 2, 1989
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, 135, № 2, 1989
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, 135, № 2, 1989

УДК 512.7

МАТЕМАТИКА

Б. Н. МЕСАБЛИШВИЛИ

КОНЕЧНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ГАЛУА ВНУТРЕННЕГО КОММУТАТИВНОГО КОЛЬЦА В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ТОПОСЕ

(Представлено членом-корреспондентом Академии Х. Н. Инасаридзе 17.11.1988)

С применением конструкции Чеиза и Свидлера [1] в категории внутренних коммутативных R-алгебр (R — внутреннее коммутативное кольцо) в элементарном топосе дается определение конечного расширения Галуа кольца R. Доказывается, что в случае связного кольца это определение и определение нормального расширения Галуа кольца R в смысле Барра [2] эквивалентны.

Введем следующие обозначения: $\underline{E}$—элементарный топос с объектом натуральных чисел; 1—терминальный объект топоса $\underline{E}$; $\underline{F}$—функтор из категории конечных множеств в топосе $\underline{E}$, который определяется так: $F(n)=\coprod_n 1$; R—внутренее коммутативное кольцо в топосе $\underline{E}$. Если A и B являются внутренними R-алгебрами, то через $A\otimes_R B$ обозначается их тензорное произведение [3].

Напомним несколько определений из [1]. В категории с конечными произведениями и коуравнителями объект X называется строгим, если функтор $X\times$ — отражает изоморфизмы и называется коплоским, если $X\times$ — сохраняет коядро.

Рассмотрим категорию A, которая двойственна категории внутренних коммутативных R-алгебр. Поскольку в категории внутренних коммутативных R-алгебр существуют уравнители и тензорное произведение задает копроизведения [3], то A является категорией с коуравнителями и конечными произведениями.

Аналогично случаю топоса множеств [1] доказывается следующая

Лемма 1. Коммутативная R-алгебра A является строгим и коплоским объектом в категории A тогда и только тогда, когда A является строго плоским R-модулем.

Пусть G—конечная группа (в обычном смысле). Обозначим экспоненциал $R^{F(G)}$ через GR. Поскольку F является точным функтором [2], то можно рассматривать GR как группу в категории A.

В этой ситуации введем

Определение 1. Будем говорить, что коммутативная R-алгебра A является конечным расширением Галуа кольца R с группой Галуа G, если A является коплоским GR-объектом Галуа в категории $\underline{A}$ [1].

Пусть R является связным кольцом.

Определение 2. (Барр [2]). Будем говорить, что коммутативная R-алгебра A является расширением Галуа кольца R, если существует такой R-прообразующий S [2], что для некоторого натурального числа n имеется S-алгебрный изоморфизм: $A\underset{R}{\otimes}S\approx S^n$.

Отметим, что если A является расширением Галуа кольца R в смысле определения 2 в топосе множеств, тогда A — строго сепарабельная R-алгебра, которая является расширением Галуа кольца R в смысле работы [4] тогда и только тогда, когда A — нормальное расширение кольца R. Поэтому ниже будем рассматривать лишь нормальные расширения Галуа в смысле Барра [2].

Если A является нормальным конечным расширением кольца R в смысле определения 2, то в силу 4.6 из [5] существует два R-гомоморфизма f_1, $f_2: A\to A^{Aut(A)}$ ($Aut(A)$—группа всех R-автоморфизмов алгебры A), удовлетворящих соотношениям:

1) $\pi_g f_1=1$, 2) $\pi_g f_2=g$ для всех $g\in Aut(A)$, которые индуцируют R-изоморфизм $A\underset{R}{\otimes}A\approx A^{Aut(A)}$.

Так как $Aut(A)$— конечная группа [5], то можно рассматривать $F(Aut(A))$. Имеется R-изоморфизм $h: A\xrightarrow{Aut(A)}A\underset{R}{\otimes}(Aut(A)R)$, который получается из вышеуказанного изоморфизма. Рассмотрим композицию $hf_2: A\to A\underset{R}{\otimes}(Aut(A)R)$. Учитывая условие 2), непосредственно проверяется, что пара (A, hf_2) является $Aut(A)R$-объектом в категории $\underline{A}$ [1]. Далее, в силу определения 2 существует такой R-прообразующий S, что для некоторого натурального числа n имеется S-изоморфизм $A\underset{R}{\otimes}S\approx S^n$. Отсюда и получается, что A является строго плоским R-модулем, т. е. строгим и коплоским объектом в категории $\underline{A}$. Поэтому A является коплоским $Aut(A)R$-объектом Галуа в категории $\underline{A}$, следовательно, конечным расширением Галуа кольца R с группой Галуа $Aut(A)$ в смысле определения 1.

Таким образом, доказывается

Теорема 1. *Пусть A является нормальным расширением связного кольца R в смысле определения 2. Тогда A является конечным расширением Галуа кольца R в смысле определения* 1.

Ниже будем пользоваться стандартными обозначениями из теории топосов (см. [6]).

Лемма 2. Пусть A является конечным расширением Галуа кольца R в смысле определения 1. Тогда в топосе E существует такой объект Y с глобальным носителем, что в топосе $\underline{E}/Y$ Y^*A является Y^*R-прообразующим.

Пусть (A_i)—конечное семейство R-алгебр. Будем говорить, что (A_i) является R-покрывающим семейством, если в топосе $\underline{E}$ существует такой объект Y с глобальным носителем, что в топосе $\underline{E}/Y$ $Y^*(\Pi A_i)$ является Y^*R-прообразующим.

Для любой коммутативной R-алгебры S в качестве S-покрывающего семейство возьмем семейство вида $(A_i\underset{R}{\otimes}S)$, где (A_i)—R-покрывающее семейство. Доказывается, что так получается предтопология Гротендика [6] на категории $\underline{A}$. Обозначим через τ топологию Гротендика на категории $\underline{A}$, которая порождается вышеопределенной предтопологией.

Лемма 3. Пара (A, τ) является точным слева ситусом [2].

Отметим, что если A является конечным расширением Галуа кольца R в смысле определения 1, то можно доказывать, что $A \approx \Pi A_i$ и (A_i) является R-покрывающем семейством.

Определение 3. Пусть A— внутренная коммутативная R-алгебра. Будем говорить, что A является строго сепарабольной R-алгеброй, если существует такое R-покрывающее семейство (A_i), что для некоторого натурального числа n и для всех i имеется S_i-алгебрный изоморфизм $A \underset{R}{\otimes} S_i \approx S_i^n$.

Лемма 4. Пусть R является связным кольцом. Тогда категория строго сепарабельных R-алгебр является категорией Галуа [6], в частности, элементарным топосом.

Топос всех расширений Галуа кольца R в смысле определения 2 является полным подтопосом топоса строго сепарабельных R-алгебр. Доказывается, что функтор вложения обладает как левым, так и правым сопряженным функтором. Отсюда получается, что если $\mathbf{A}$ является конечным расширением кольца R в смысле определения 1, то существует такой R-прообразующий, S, что множество R-алгебрных гомоморфизмов из A в S не пусто. Если применим 2.1 из [2], то получаем, что $A \underset{R}{\otimes} S \approx S^n$ для некоторого натурального числа n. Кроме того, если A является расширением Голуа кольца R в смысле определения 1, то существует изоморфизм $A \underset{R}{\otimes} A \approx A^n$, а это означает, что A—нормальное расширение кольца R и, следовательно, является нормальным расширением Галуа кольца R в смысле определения 2.

Таким образом, наконец, получается следующая

Теорема 2. *Пусть R является связным кольцом. Тогда определение* 1 *и определение нормального расширения Галуа в смысле Барра* [2] *эквивалентны.*

Академия наук Грузинской ССР
Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе

(Поступило 8.12.1988)

მათემატიკა

ბ. მესაბლიშვილი

ელემენტარულ ტოპოსში შინაგანი კომუტაციური რგოლის გალუას სასრული გაფართოებები

რეზიუმე

დამტკიცებულია, რომ ელემენტარულ ტოპოსში (ნატურალურ რიცხვთა ობიექტით) შინაგანი კომუტაციური ბმული რგოლის ნორმალური გალუას გაფართოების ბ ა რ ი ს განმარტება [2] ეკვივალენტურია კატეგორიაში გალუას ობიექტის ჩ ე ი ზ ი ს განმარტების [1] კერძო შემთხვევისა.

MATHEMATICS

B. N. MESABLISHVILI

FINITE GALOIS EXTENSIONS OF A CONNECTED INTERNAL RING IN AN ELEMENTARY TOPOS

Summary

The notion of a normal Galois extension of an internal connected commutative ring in an elementary topos (with a natural number object) introduced by M. Barr [2] is equivalent to a particular case of the Galois object notion in the category introduced by S. U. Chase [1].

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. S. U. Chase, M. E. Sweedler. Hopf algebras and Galois theory.—Lect. Notes in Math., 1969, v. 97.
2. M. Barr. J. Pure Appl. Algebra, 25, 1982, 227—247.
3. D. Howe. J. Pure Appl. Algebra, 21, 1—81, 161—166.
4. S. U. Chase *et al.* Mem. AMS, 52, 1965, 15—33.
5. M. Barr. J. Pure Appl. Algebra, 19, 1980, 21—42.
6. P. Джонстон. Теория топосов. М., 1986.